8.4: Théorème de l'énergie pour un solide

1) La variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures

$$\boxed{W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1}$$

Les forces intérieures ne travaillent pas. Pour chaque couple de points i, j du solide on a que $\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$ (3eme loi de Newton), donc:

$$\vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{j,i} \cdot d\vec{r}_j = (\vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{j,i}) \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_{i,j} - \vec{F}_{i,j}) \cdot d\vec{r} = 0$$

$d\vec{r} = d\vec{r}_i = d\vec{r}_j$: dans un solide indéformable les distances sont maintenues

2) Si il n'y a que des **forces conservatives** qui travaillent, alors **l'énergie mécanique est conservée**

$$\boxed{E = K + V(\vec{r}) = \text{ constante}}$$

$$\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

8.4 Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide:

$$\boxed{E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^{\,2} + M \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot \left(\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}\right)}$$

N.B.: pour chaque point P, A du solide

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_A + \overrightarrow{AP}\right) = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$E_{\text{cin}} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{v}_A^{\,2} + M \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2$$

$$(\tilde{I}_G)_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[(\overrightarrow{GP_\alpha})^2 \delta_{ij} - (GP_\alpha)_i (GP_\alpha)_j\right]$$

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left[\vec{\omega}^{\,2}\left(\overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2 - \left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left[\sum_{i,j} \omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2 - \sum_{i,j} \omega_i \omega_j (AP_\alpha)_i (AP_\alpha)_j\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\overrightarrow{AP_\alpha}\right)^2 \delta_{ij} - (AP_\alpha)_i (AP_\alpha)_j\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \omega_i \omega_j (\tilde{I}_A)_{ij} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot \left(\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}\right)$$

8.4 Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide:

$$\boxed{E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}\right)}$$

Notation:
$E_{cin} = K$

Cas particuliers

- Si $\vec{v}_A = 0$ $\Rightarrow$ $E_{cin} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{I}_{\Delta_A} \omega \hat{e}_\Delta = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_A} \omega^2$

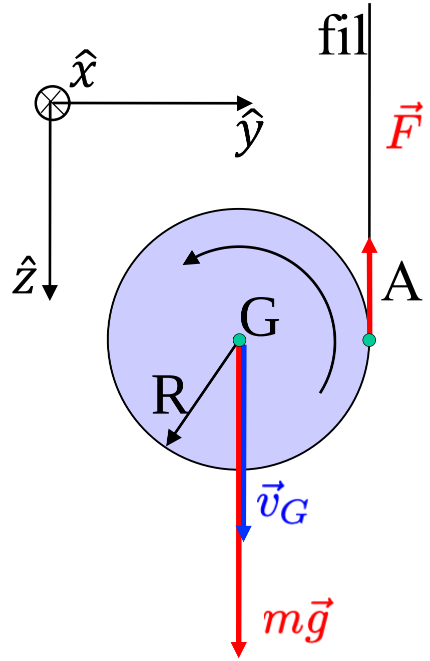
- Si $A = G$ $\Rightarrow$ $E_{cin} = \frac{1}{2} M v_g^2 + \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_G} \omega^2$ $\Leftrightarrow$ $K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2$

$K^* = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_G} \omega^2$

$M \vec{v}_G \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GG}\right) = 0$

2eme théorème de König

8.4: Yoyo: solution 1



Quelle est la vitesse du centre de masse G quand le yoyo est tombé d'une hauteur h?

- Equations du mouvement :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G = -RF\hat{x} \quad \Longrightarrow \quad -RF\hat{x} = \frac{d(-I_G\omega\hat{x})}{dt} = -I_G\dot{\omega}\hat{x} = -\frac{1}{2}\mathrm{m}R^2\frac{a_G}{R}\hat{x}$$

$$\Downarrow$$

$$F = \frac{1}{2}ma_G$$

$$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad F = mg - ma_G \quad \Longrightarrow \quad a_G = \frac{2}{3}g$$

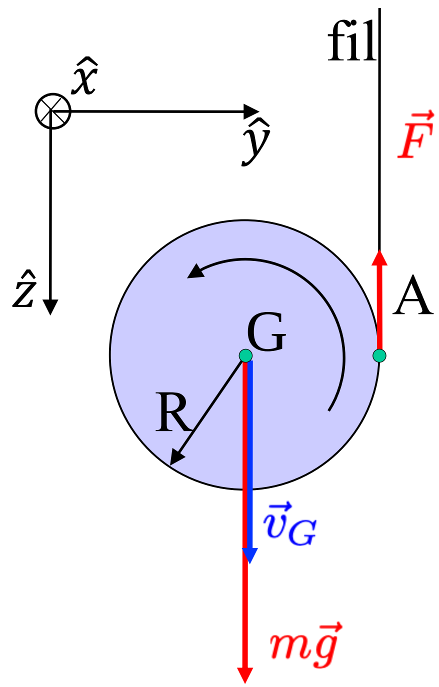
- Conditions initiales (à t = 0) : $v_G = 0 \qquad z = 0$
- Solution :

$$v_G(t) = a_G t$$
$$z(t) = \frac{1}{2}a_G t^2$$

$$v_G(z) = \sqrt{2a_G z} \quad \Rightarrow \quad v_G(h) = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/38

8.4: Yoyo: solution 2



Le poids est conservatif et $\vec{F}$ ne travaille pas
⇒ le problème peut être résolu par la conservation de l'énergie :

$$K_{in} + V_{in} = K_{fin} + V_{fin}$$

$K_{in} = 0$ $\quad V_{in} = mgz(0) = 0$ $\quad V_{fin} = -mgz$

Par rapport à G

$$K_{fin} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v_G}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv_G^2$$

Par rapport à A

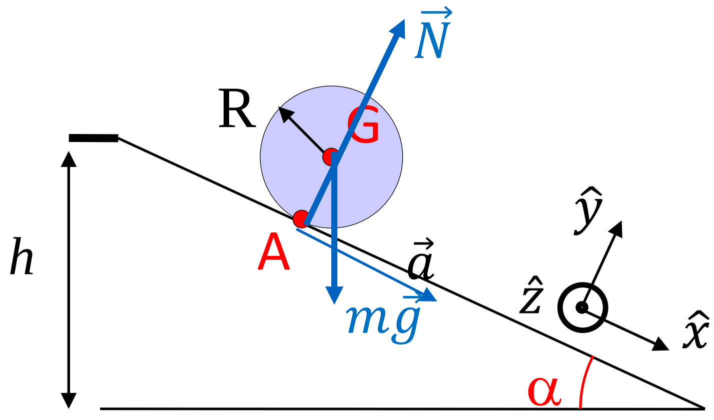
$$K_{fin} = \frac{1}{2}I_A\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\left(\frac{v_G}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv_G^2$$

$$\frac{3}{4}mv_G^2 - mgz = 0 \quad \Rightarrow v_G(h) = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

8.4-8.5: Glissement vs. Roulement

A quelle vitesse les deux sphères arrivent au fond de la pente de longueur L?



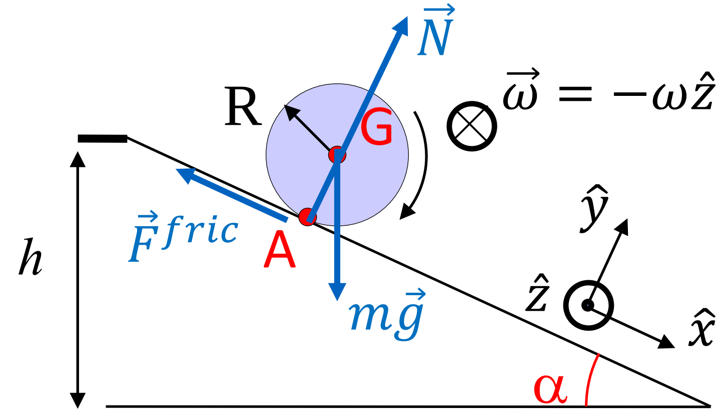
La sphère qui glisse descende avec une accélération

$$a_G = g\sin\alpha$$

$$L = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}a_g t^2$$

$$v_G = a_G t$$

$$v_G = \sqrt{2La_G} = \sqrt{2Lg\sin\alpha} = \sqrt{2gh}$$



sphère qui roule (sans glisser):
théorème du moment cinétique appliqué en A

$$v_G = \omega R \qquad \vec{L}_A = I_A\vec{\omega}$$

$$I_A = I_{Gz} + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

$$\left(I_{Gz} = \frac{2}{5}mR^2\right)$$

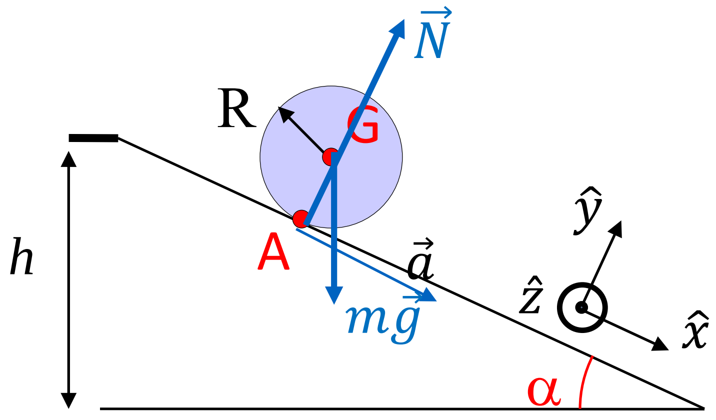
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -I_A\dot{\omega}\hat{z} = -I_A\frac{a_G}{R}\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} \quad \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{7}{5}mRa_G = -Rmg\sin\alpha \end{cases}$$

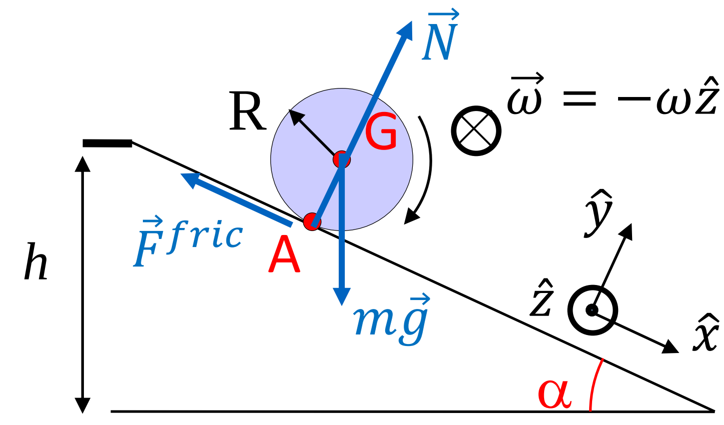
$$a_G = \frac{5}{7}g\sin\alpha \qquad v_G = \sqrt{2La_G} = \sqrt{\frac{10}{7}Lg\sin\alpha} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

8.4-8.5: Glissement vs. Roulement

A quelle vitesse les deux sphères arrivent au fond de la pente de longueur L?



La sphère qui glisse:
- $\vec{N} \perp d\vec{r}$ donc ne travaille pas
- $m\vec{g}$ est conservative



sphère qui roule (sans glisser):
- $\vec{N} \perp d\vec{r}$ donc ne travaille pas
- $\vec{F}^{fric}$ ne travaille pas parce que $v_A = 0$
- $m\vec{g}$ est conservative

- Energie mécanique totale est conservée: $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = K + V = const$

$K_i = 0 \qquad K_f = \frac{1}{2}mv_G^2$

$V_i = 0 \qquad V_f = -mgh$

$$\frac{1}{2}mv_G^2 - mgh = 0$$

$$v_G = \sqrt{2gh}$$

$K_i = 0 \qquad V_i = 0 \qquad V_f = -mgh$

Par rapport à G:

$K = K^* + \frac{1}{2}Mv_G^2$

$K^* = \frac{1}{2}\tilde{I}_{\Delta_G}\omega^2$

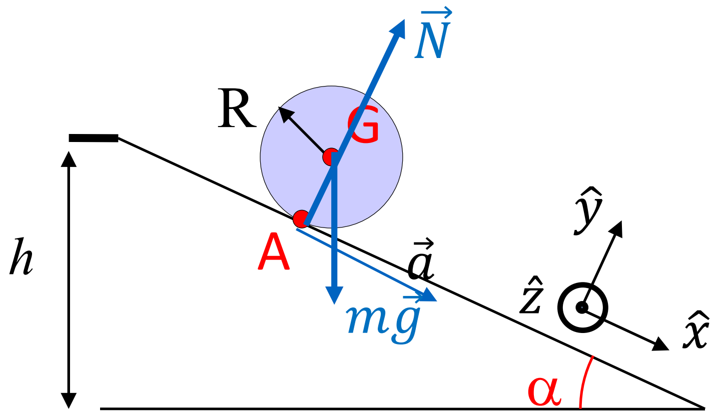
$(I_{Gz} = \frac{2}{5}mR^2;\ v_G = \omega R)$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}\omega^2 = \frac{1}{2}(1+\frac{2}{5})mv_G^2$$

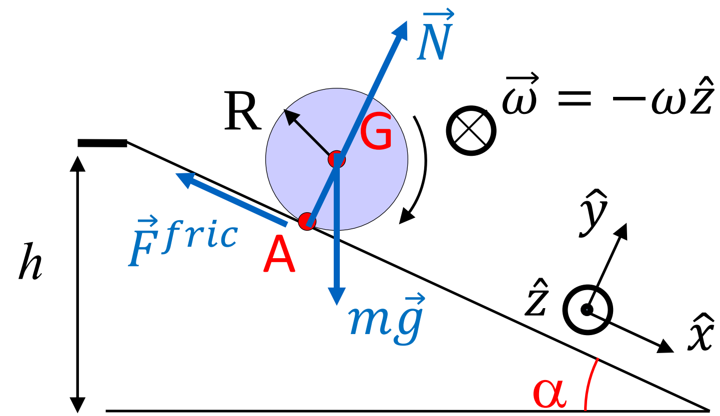
$$\frac{7}{10}mv_G^2 - mgh = 0 \Rightarrow v_G = \sqrt{10/7gh}$$

8.4-8.5: Glissement vs. Roulement

A quelle vitesse les deux sphères arrivent au fond de la pente de longueur L?



La sphère qui glisse:
- $\vec{N} \perp d\vec{r}$ donc ne travaille pas
- $m\vec{g}$ est conservative



sphère qui roule (sans glisser):
- $\vec{N} \perp d\vec{r}$ donc ne travaille pas
- $\vec{F}^{fric}$ne travaille pas parce que $v_A = 0$
- $m\vec{g}$ est conservative

- Energie mécanique totale est conservée: $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = K + V = const$

$K_i = 0 \qquad K_f = \frac{1}{2}mv_G^2$

$V_i = 0 \qquad V_f = -mgh$

$\frac{1}{2}mv_G^2 - mgh = 0$

$v_G = \sqrt{2gh}$

$K_i = 0 \qquad V_i = 0 \qquad V_f = -mgh$

Par rapport à A: $\vec{v}_A = 0$

$K_f = \frac{1}{2}\tilde{I}_{\Delta_A}\omega^2$

$I_A = I_{Gz} + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$

$(I_{Gz} = \frac{2}{5}mR^2;\ v_G = \omega R)$

$\frac{7}{10}mv_G^2 - mgh = 0 \Rightarrow v_G = \sqrt{10/7gh}$

8.6: Dynamique du solide avec axe fixe

- Quand un axe de rotation Δ est fixe (et qu'on ne s'intéresse pas aux forces et moments qui maintiennent cet axe fixe), il est utile de projeter le théorème du moment cinétique sur cet axe:
  - Pour tout point O sur l'axe Δ de direction $\hat{u}$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_O \cdot \hat{u}\right) = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u}$$

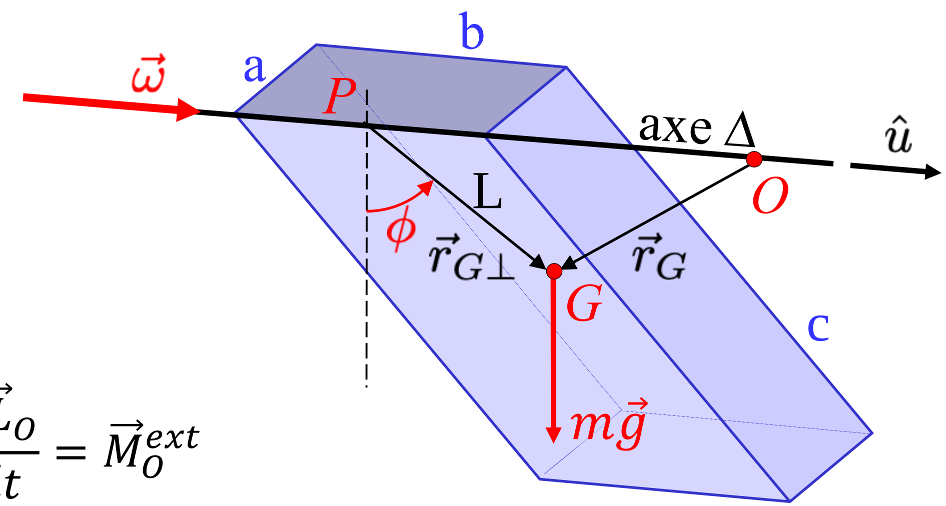
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(I_\Delta \omega) = \sum_\alpha \left(\vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}\right) \cdot \hat{u}$$

$$\Rightarrow I_\Delta \dot{\omega} = \sum_\alpha \left(\vec{r}_{\alpha,\perp} \wedge \vec{F}_{\alpha,\perp}^{\text{ext}}\right) \cdot \hat{u}$$

où $\vec{r}_{\alpha,\perp}$ et $\vec{F}_{\alpha,\perp}$ sont les composantes de $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$ perpendiculaires à $\hat{u}$

$\vec{r}_{\alpha,\parallel} \wedge \vec{F}_{\alpha,\perp}^{ext}$ et $\vec{r}_{\alpha,\perp} \wedge \vec{F}_{\alpha,\parallel}^{ext}$ sont perpendiculaire à $\hat{u}$

- Ex.: pendule physique = solide soumis à la pesanteur et libre de osciller autour d'un axe fixe horizontal



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}$$

$$I_\Delta \dot{\omega} = \left(\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}\right) \cdot \hat{u} = \left(\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{g}\right) \cdot \hat{u} + \left(\overrightarrow{PG} \wedge m\vec{g}\right) \cdot \hat{u}$$

$$I_\Delta \ddot{\phi} = \left(\overrightarrow{PG} \wedge m\vec{g}\right) \cdot \hat{u} = -Lmg \sin\phi$$

$$\ddot{\phi} + \frac{mgL}{I_\Delta} \sin\phi = 0$$

$$I_\Delta = I_{G,u} + md^2 = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2) + mL^2$$

- pendule mathématique: toute la masse m est en G ($I_\Delta = mL^2$)

$$\boxed{\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin\phi}$$

8.6: Dynamique du solide avec axe fixe

Conservation énergie mécanique

$$V = -mgL\cos\phi$$

$$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{G,u}\omega^2 = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{G,u}\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}(mL^2 + I_{G,u})\omega^2$$

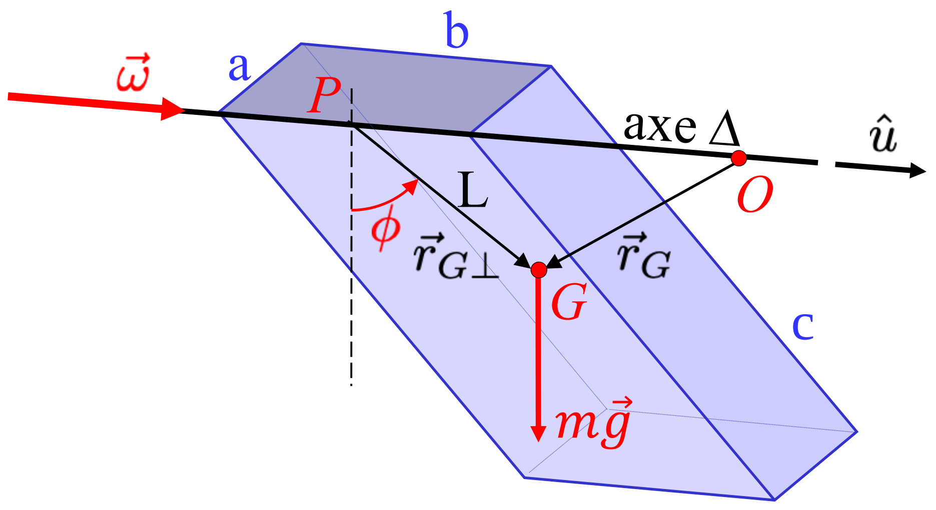
$$\frac{1}{2}\left(mL^2 + I_{G,u}\right)\omega^2 - mgL\cos\phi = cte$$

On dérive par rapport à t $(\omega(t) = \dot{\phi}(t))$

$$\left(mL^2 + I_{G,u}\right)\dot{\phi}\ddot{\phi} + mgL\sin\phi\,\dot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\phi} + \frac{mgL}{I_\Delta}\sin\phi = 0$$

Théoréme du moment cinetique



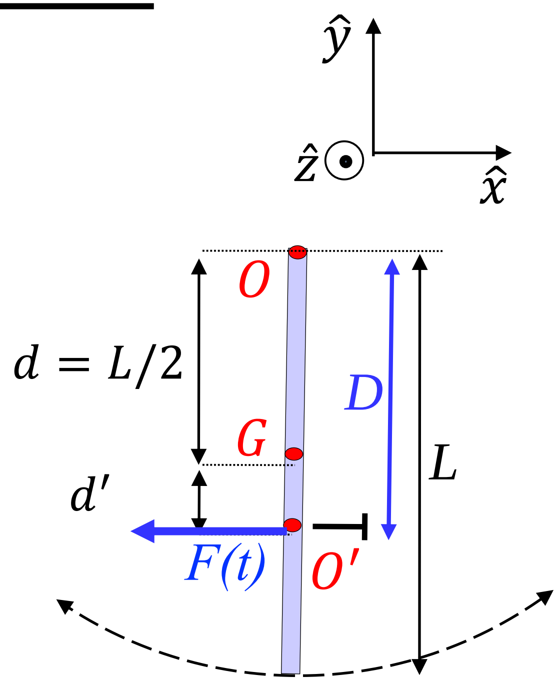
$$I_\Delta\dot{\omega} = \left(\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{g}\right)\cdot\hat{u} = \left(\overrightarrow{OP}\wedge m\vec{g}\right)\cdot\hat{u} + \left(\overrightarrow{PG}\wedge m\vec{g}\right)\cdot\hat{u}$$

$$I_\Delta\ddot{\phi} = \left(\overrightarrow{PG}\wedge m\vec{g}\right)\cdot\hat{u} = -Lmg\sin\phi$$

$$\ddot{\phi} + \frac{mgL}{I_\Delta}\sin\phi = 0$$

$$I_\Delta = I_{G,u} + md^2 = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) + mL^2$$

8.6: Calcul du centre de percussion



- Pendule physique interrompu dans sa course:
  - Une barre de longueur L et masse M tourne autour d'un axe fixe perpendiculaire à la feuille et passant par le point O à l'extrémité de la barre:
  - Juste avant le choc ($t = 0$) : $v_G = \omega d,$
  - Juste après le choc ($t = \Delta t$) : $v_G = 0, \omega = 0$ (point G fixe)
  - A quelle distance D de O il faut appliquer la buttée pour que la barre s'arrête sans avoir de extra forces appliquées en O?

  La force appliquée par la buttée ainsi que la durée du choc sont inconnus, mais on peut écrire:

$$\Delta p_x = 0 - M v_G = \int_0^{\Delta t} -F(t)dt \Rightarrow M v_G = \int_0^{\Delta t} F(t)dt$$

$$\Delta L_{G,z} = 0 - I_G\omega = -d'\int_0^{\Delta t} F(t)dt \Rightarrow I_G\omega = d'\int_0^{\Delta t} F(t)dt$$

$$\Rightarrow I_G\omega = d' M v_G = d' M \omega d$$

$$\Downarrow$$

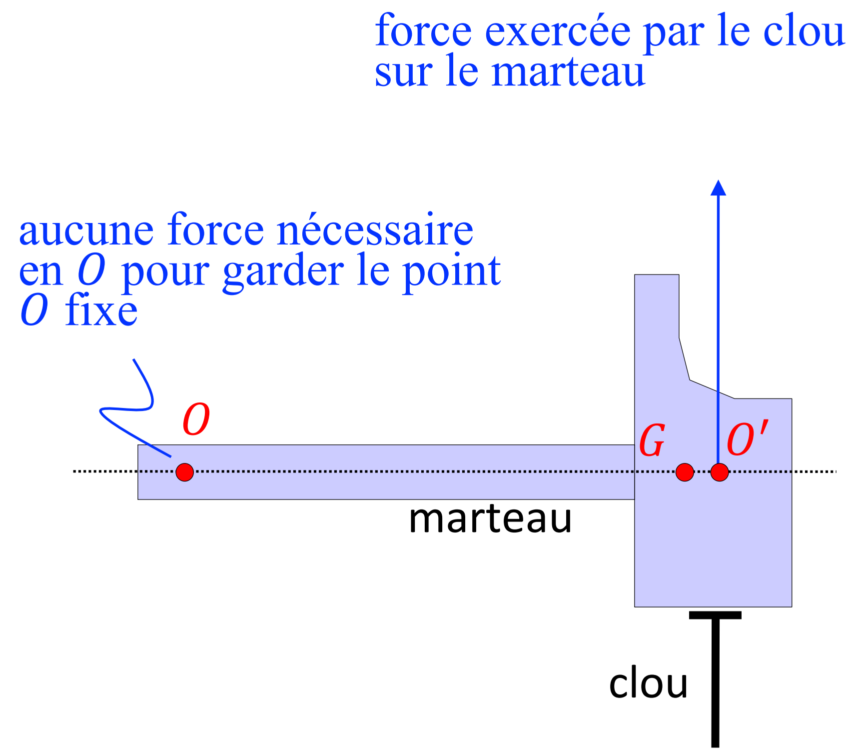
$$I_G = d' d M = \frac{L}{2} d' M$$

$$I_G = \frac{1}{12} M L^2 = \frac{L}{2} d' M \Rightarrow d' = \frac{L}{6} \Rightarrow D = d + d' = \frac{2}{3} L$$

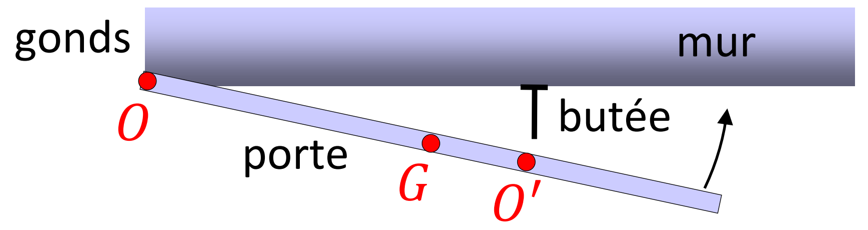
Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/88

8.6: Calcul du centre de percussion

- Solide libre de tourner autour d'un axe fixe passant par O
- Centre de percussion:
  - point O' sur la droite OG tel qu'un choc (percussion) appliqué en ce point (perpendiculairement à OG) n'engendre aucune réaction (répercussion) de l'axe de rotation sur le solide



- Exemples et applications:
  - Marteau
    - où le tenir ?
  - Raquette de tennis, batte de baseball,
    - où frapper la balle ?
  - Butée de porte
    - où la placer ?



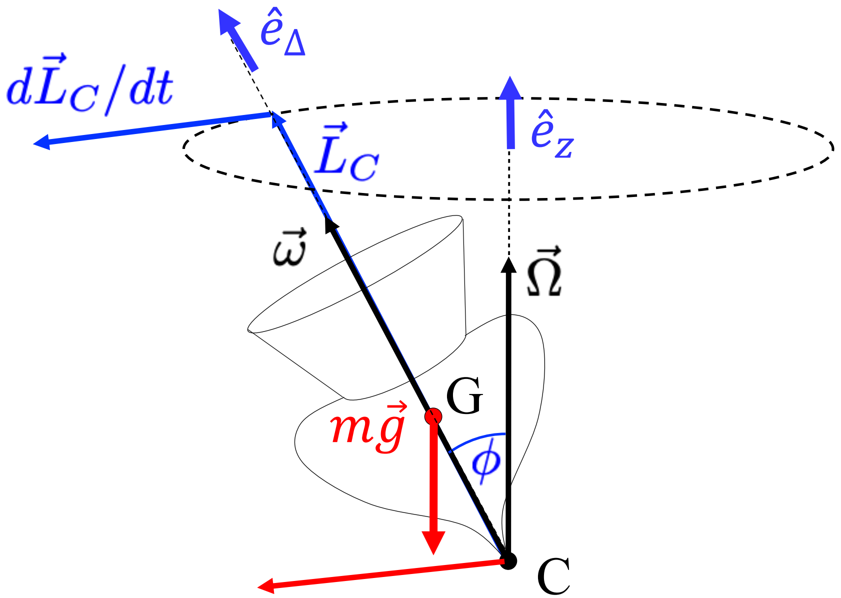
butée placée au centre de percussion: aucune force appliquée sur les gonds (charnières)

8.7: Rotation autour d'un axe fixe

- Toupie symétrique avec un point fixe:
  - Le moment du poids par rapport au point fixe C est constamment perpendiculaire au moment cinétique ⇒ la norme du moment cinétique reste constante: $\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega} = I_\Delta \omega \hat{e}_\Delta$
  - L'axe de rotation propre a un mouvement de précession autour de l'axe vertical avec vitesse angulaire Ω

$$\boxed{\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = I_\Delta \omega \frac{d\hat{e}_\Delta}{dt} = I_\Delta \omega\, \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_\Delta = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C}$$

- Note: on a négligé le moment cinétique causé par la rotation Ω $\left(\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \cong \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = I_\Delta \omega \hat{e}_\Delta\right)$! valable si $\Omega \ll \omega$



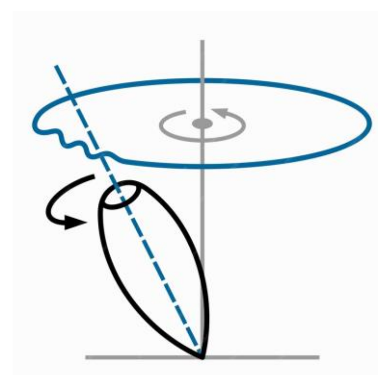
$$\vec{M}_C = \vec{CG} \wedge m\vec{g} \quad (\perp \vec{L}_C)$$

$$CG\, mg \sin\phi = \Omega L_C \sin\phi$$

$$\Omega = \frac{CG\, mg}{L_C} = \frac{CG\, mg}{I_\Delta \omega}$$

La vitesse de précession est inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre de la tupie

- Cas général: ϕ n'est pas constant mais oscille entre deux extrêmes (mouvement de nutation)



Demo:https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/42

8.6 Pendule physique tournant: angle d'équilibre

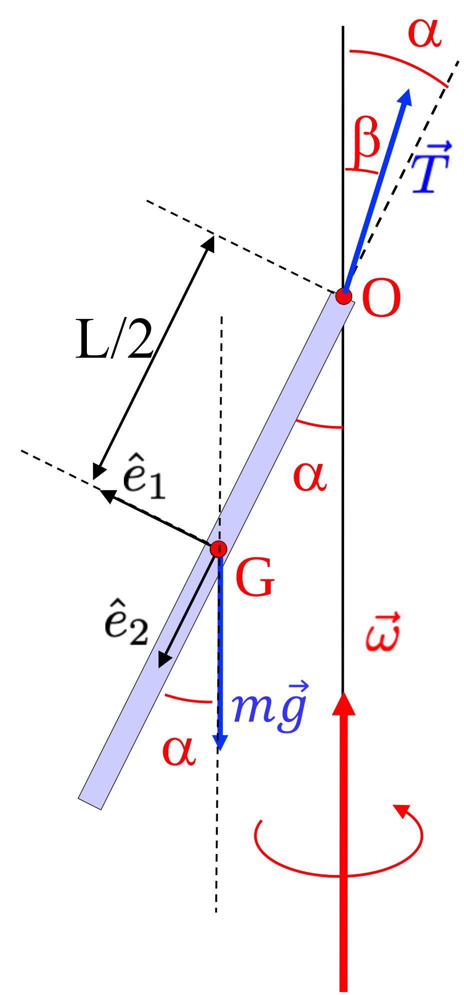
- Rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe passant par O
- Dans repère d'inertie $G\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

$$\vec{\omega} = \omega \sin\alpha\, \hat{e}_1 - \omega\cos\alpha\, \hat{e}_2$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{12} mL^2 \omega \sin\alpha\, \hat{e}_1$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \omega \wedge \vec{L}_G = \frac{1}{12} mL^2\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha)\hat{e}_3$$

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}mL^2 \end{pmatrix}$$



- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \overrightarrow{GO}\wedge\vec{T} = \frac{L}{2} T\sin(\alpha-\beta)\,\hat{e}_3 = \frac{L}{2} T(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\hat{e}_3$$

- Théorème du centre de masse :

$$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{T} \;\Rightarrow\; \begin{cases} T\cos\beta = mg \\ T\sin\beta = m\omega^2 \frac{L}{2}\sin\alpha \end{cases}$$

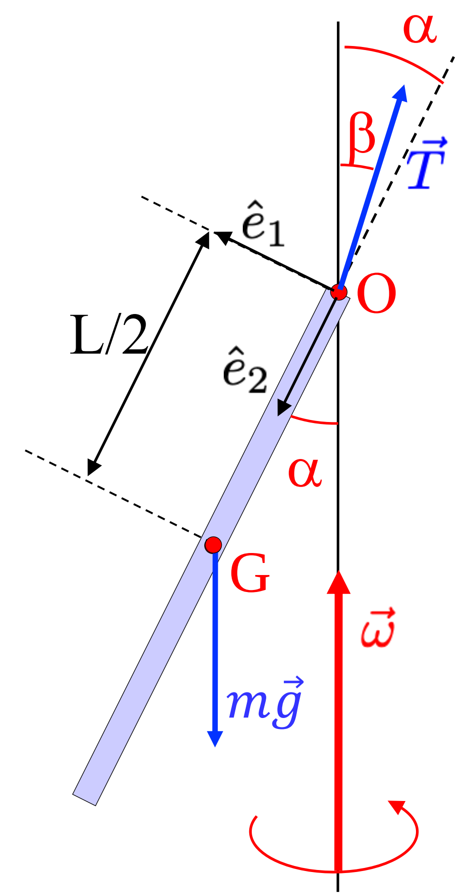
$$\frac{1}{12} mL^2\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{L}{2}(mg\sin\alpha - \cos\alpha\, m\omega^2 \frac{L}{2}\sin\alpha)$$

$$\frac{1}{3} L^2\omega^2\cos\alpha = \frac{L}{2} g \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L\omega^2}$$

démo

8.6 Pendule physique tournant (version alternative)

- Rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe passant par O
- Dans repère d'inertie $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$
- Par la formule de Steiner



$$\tilde{I}_O = \tilde{I}_G + m\begin{pmatrix} \frac{L^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{12}+\frac{mL^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12}+\frac{mL^2}{4} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega \sin\alpha\, \hat{e}_1 - \omega\cos\alpha\, \hat{e}_2$$

$$\vec{L}_O = \tilde{I}_O \cdot \vec{\omega} = (\frac{mL^2}{12}+\frac{mL^2}{4})\omega \sin\alpha\, \hat{e}_1$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \omega \wedge \vec{L}_O = (\frac{mL^2}{12}+\frac{mL^2}{4})\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\, \hat{e}_3$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{L}{2} mg \sin\alpha\, \hat{e}_3$$

$$\frac{L}{2} mg \sin\alpha = (\frac{mL^2}{12}+\frac{mL^2}{4})\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{mL^2}{3}\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L\omega^2}$$